

- Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2005.
- FAKHRY, M., *Al-Farabi: Founder of Islamic Neoplatonism: His Life, Works and Influence*, Oxford, Oneworld Publications, 2002.
- FIERRO, M., «La religión», en M.J. Viguera (coord.), *Historia de España Menéndez Pidal*, vol. VIII, t. II, Madrid, Espasa-Calpe, 1997, pp. 437-550.
- FIERRO, M., «Revolución y tradición: algunos aspectos del mundo del saber en al-Ándalus durante las épocas almorávide y almohade», en M.L. Ávila y M. Fierro (eds.), *Estudios onomásticos-biográficos de al-Ándalus*, vol. X, Madrid/Granada, 2000, pp. 131-165.
- FLETCHER, M., «Almohadism: An Islamic Context for the Work of Saint Thomas Aquinas», en P. Cressier, M. Fierro y L. Molina (eds.), *Los almohades: problemas y perspectivas*, 2 vols., Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2005, pp. 1.163-1.226.
- FORCADA, M., «La ciència àrab al sud de Catalunya», en J. Vernet y R. Parés (dirs.), *La Ciència en la Història dels Països Catalans*, vol. I, Barcelona/Valencia, Institut d'Estudis Catalans/Universitat de València, 2004, pp. 45-74.
- FORCADA, M., «Síntesis y contexto de las ciencias de los antiguos en época almohade», en P. Cressier, M. Fierro y L. Molina (eds.), *Los almohades: problemas y perspectivas*, 2 vols., Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2005, pp. 1.091-1.135.
- FORCADA, M., «Ibn Bājjā and the Classification of the Sciences in al-Andalus», *Arabic Sciences and Philosophy*, 16, 2006, pp. 287-307.
- GARCÍAS PALOU, S., *La formación científica de Ramon Llull*, Inca, Consell de Mallorca 1989.
- PUIG MONTADA, J., *Averroes, juez, médico y filósofo andalusí*, Sevilla, Consejería de Educación y Ciencia, Junta de Andalucía, 1998.
- SAMSÓ, J., «Notas sobre la astronomía y la astrología de Llull», *Estudios Lulianos*, vol. 25, n.º 2, 1981, pp. 199-220.
- SAMSÓ, J., *Las ciencias de los antiguos en al-Ándalus*, Madrid, Mapfre, 1992.
- URVOY, D., «La vie intellectuelle et spirituelle dans les Baléares musulmanes», *Al-Andalus*, 37, 1972, pp. 87-132.
- URVOY, D., *Penser l'Islam. Les présupposés islamiques de l'« Art » de Llull*, Paris, Vrin, 1980.
- URVOY, D., «Les professions de foi d'Ibn Tumart. Problèmes textuels et doctrinaux», en P. Cressier, M. Fierro y L. Molina (eds.), *Los almohades: problemas y perspectivas*, 2 vols., Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2005, pp. 739-752.
- VERNET, J., *Estudios sobre historia de la ciencia medieval*, Bellaterra, Universitat Autònoma de Barcelona, 1979.
- VIGUERA, M.J. (coord.), *Historia de España Menéndez Pidal*, vol. VIII, t. II, Madrid, Espasa-Calpe, 1997.

## Las prácticas combinatorias en el Magreb en la época de Ramon Llull

Ahmed Djebbar. Experto en ciencia árabe, Université des Sciences et Technologies de Lille, Francia

### Introducción

Entre finales del siglo XII y mediados del XIV, aparecen en escritos matemáticos del Magreb una serie de prácticas combinatorias. Estrechamente relacionadas con preocupaciones y trabajos no matemáticos iniciados y desarrollados en Oriente desde finales del siglo VIII, esas prácticas se inscriben en un amplio contexto cultural caracterizado, en especial, por una cierta renovación de las actividades referentes a la

lengua y la cultura árabes. Los califas almohades, los hafsidas de Ifriqiya y los merinidas del Magreb Extremo no son ajenos a esa dinámica, que afectó a los centros culturales y científicos más importantes de la región, como Marrakech, Fez, Túnez y Bugía.

Precisamente en estas dos últimas ciudades pasó Ramon Llull (1232-1316) una temporada en 1293, para volver luego a Túnez en 1314, y a Bugía en 1307.<sup>1</sup> Durante los siglos XII y XIII estas dos ciudades eran importantes centros culturales donde

1. Sobre la vida y obra de Ramon Llull, véase R.D.F. Pring-Mill, «Ramon Llull», en Ch.C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York, Charles Scribner's Sons, 1970-1980, vol. 8, pp. 547-551.

trabajaron eminentes intelectuales, como el gran místico Ibn Arabi (m. 1240) y el filósofo Ibn Sabin (m. 1270), así como científicos de primera fila, como el astrónomo tunecino Ibn Ishaq y el matemático al-Qurashi (m. 1184), un especialista en álgebra y ciencia de las herencias, originario de Sevilla, que durante un tiempo enseñó en Bugía.<sup>2</sup>

Hoy sabemos que el pensador catalán tenía un conocimiento preciso de algunas contribuciones árabes. Es el caso, en especial, del *Budd al-ârif* («El camino obligado del entendido») de Ibn Sabin y del *Maqâqid al-falâsifa* («Las intenciones de los filósofos») de Algazel (m. 1111). Es muy posible que, en ocasión de su estancia en esas dos ciudades, Llull conociera el contenido de alguno de esos escritos y que se inspirara en ellos sin considerar necesario citar a sus autores. También es posible que le informaran oralmente de los problemas que se debatían en los medios cultivados, algunos de los cuales atañían a sus propias preocupaciones teológicas.

Pero tampoco es imposible que, dados sus orígenes mallorquines, Ramon Llull se viera impregnado desde su adolescencia por ciertos elementos de la cultura árabe, aún presentes en su isla natal. En efecto, la reconquista de Mallorca en 1229 no podía borrar de un día para otro las consecuencias de más de tres siglos de civilización arabomusulmana. Algo que, además, es corroborado por la formación de Llull. En efecto, su dominio del árabe era tal que pudo redactar varias obras en dicha lengua: el *Kitâb at-ta'ammul* («Libro de contemplación»), la *Disputatio Raimundi christiani et Homeri saraceni*, la *Lógica de Algazel*, *La apología de al-Kindi* y la *Contrariedades alfólica*.<sup>3</sup> Además, sus biógrafos mencionan, a propósito de sus estancias en Túnez y Bugía, largos debates con sus oponentes musulmanes. Evidentemente, esos intercambios no se podían desarrollar en otra lengua que no fuese el árabe.<sup>4</sup>

En lo que se refiere a los aspectos combinatorios que encontramos en la obra de Llull, especialmente en el *Ars compendiosa inveniendi*, el *Ars*

*demonstrativa*, el *Ars generalis ultima* y la *Tabla general*, se trata, hablando desde un punto de vista matemático, de operaciones elementales incluso a ojos de los especialistas magrebíes de su época. Pero aparecen en los escritos de Llull en una época en la que esas operaciones no eran excepcionales en los medios intelectuales del Magreb. Por lo tanto, no podemos dejar de preguntarnos sobre su eventual filiación, directa o indirecta, respecto a las prácticas y preocupaciones combinatorias árabes anteriores al siglo XIII y, más concretamente, respecto a las atestiguadas a lo largo de ese siglo.<sup>5</sup>

Estas últimas aparecen primero en el contexto de las actividades matemáticas, en forma de contribuciones teóricas que inauguran una nueva orientación. Sus autores son dos científicos de Marrakech: Ibn Munim (m. 1228) e Ibn al-Banna (m. 1321), cuyas conclusiones expondremos más adelante. Ello sugiere una primera observación, puramente cronológica: como Ramon Llull nació unos cinco años después del fallecimiento del primero y seis años antes de la muerte del segundo, es tentador suponer que la época del pensador catalán fue, para las élites magrebíes, un momento en el que las preocupaciones combinatorias estaban de actualidad y tal vez hasta un poco de moda, en especial en los medios cultivados de la corte imperial de Marrakech y de las élites de las metrópolis regionales, como Túnez y Bugía.

A la espera de que futuras investigaciones exhumen otros aspectos de esas preocupaciones y prácticas en el Occidente musulmán, vamos a presentar los elementos esenciales revelados por el estudio de estos 20 últimos años, y que ilustran su presencia en ámbitos diversos: los matemáticos, claro está, pero también los culturales, religiosos e incluso astrológicos.

Nuestra exposición no se entretendrá en los aspectos técnicos de los resultados matemáticos, que el lector podrá encontrar, descritos en detalle, en publicaciones especializadas cuyas referencias indi-

2. A. Djebbar, *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*, París, Vuibert-Adapt, 2005, pp. 80-82.

3. A. Soler, «Raymond Lulle, un profil historique», *Raimundus, christianus arabicus. Ramon Llull y el encuentro entre culturas*, Barcelona, Instituto Europeo del Mediterráneo, 2007, pp. 96-103.

4. D. Urvoy, *Penser l'Islam. Les pré-supposés islamiques de l'« Art » de Llull*, París, Vrin, 1980.

5. D. Urvoy, «Sur un aspect de la combinatoire arabe et ses prolongements en Occident», *Arabica*, XXXIX, 1992, pp. 25-41.

caremos. Se centrará sobre todo en las preocupaciones que originaron esas prácticas y en sus ámbitos de aplicación, que interesaban a un amplio público.

## Lengua árabe y combinatoria

En la civilización arabomusulmana, la combinatoria apareció, primero, como una práctica de enumeración y recuento de objetos, en disciplinas no matemáticas, en especial en astrología, lexicografía y métrica. Luego, a partir de mediados del siglo IX, con el desarrollo de las actividades matemáticas y astronómicas, aparecieron ciertas operaciones combinatorias en geometría, álgebra, aritmética y música. Esas operaciones, a menudo empíricas, eran ineludibles dado que eran las únicas que podían ofrecer soluciones para ciertos problemas que las herramientas clásicas no permitían resolver, debido, precisamente, a la naturaleza combinatoria de esos problemas.

En astrología astronómica, se tuvieron que enumerar las diferentes conjunciones de los planetas con el fin de utilizarlas en la previsión de acontecimientos. Y esta preocupación se vuelve a encontrar en todas las épocas, en especial en el siglo XIV, de lo que da prueba el matemático magrebi Ibn Haydur (m. 1413). En astrología numérica, los especialistas de este ámbito manejaron los números enteros de distintos modos: construcción o simple utilización de cuadrados y círculos mágicos cada vez más sofisticados, manejo de series de letras que simbolizaban principios o nombres divinos, la creación de la *zayrija* o «máquina de predicción», y enumeración de series de enteros pares e impares en las operaciones adivinatorias del *khatt ar-raml* (geomancia).<sup>6</sup> Entre los autores magrebíes cuyas obras circulaban en el Magreb en la época de Ramon Llull cabe mencionar sobre todo a as-Sabti (segunda mitad del siglo XII), muy conocido por su *zayrija*, muy sofisticada y her-

mética,<sup>7</sup> y al-Buni (m. 1225), gran especialista de los cuadrados mágicos con vocación astrológica.<sup>8</sup>

En el ámbito de la lexicografía, desde la segunda mitad del siglo VIII, con el fin de confeccionar diccionarios, los autores debieron enumerar y contar las raíces de la lengua árabe teniendo en cuenta varias indicaciones. Así, se atribuye a al-Khalil Ibn Ahmad (m. 791) el primer recuento exacto de las raíces bilíteras, trílteras, cuadrilíteras y hasta de cinco letras de esa lengua. Tras él, el gramático Sibawayh (m. 795) precisó el número de raíces realmente utilizadas, es decir, teniendo en cuenta las incompatibilidades de pronunciación.<sup>9</sup>

Al consultar las fuentes accesibles que hacen referencia a problemas de la lengua árabe, se tiene la impresión de que, hasta el siglo XII, los especialistas de ese ámbito no contaron con soluciones aritméticas para los problemas de enumeración de las palabras, que se trataban de una manera recurrente en sus obras. Es lo que parece confirmar la presencia, en la obra de Ibn Durayd (m. 934) titulada *Jamharat al-lughā* («Antología de la lengua»), de un procedimiento mecánico para responder a uno de los interrogantes planteados: el del recuento de todas las palabras surgidas de un grupo concreto de letras teniendo en cuenta las permutaciones y repeticiones de dichas letras. Se trata de un mecanismo constituido por un disco fijo rodeado de dos anillos corredizos. En cada uno de los tres elementos se disponen, en el orden que se quiera, las letras consideradas. Luego se gira uno de los anillos, en cada ocasión en un ángulo suficiente para conseguir una nueva alineación de todas las letras. Para contar las palabras de más de tres letras, bastaba con añadir el número de anillos necesarios para la operación.<sup>10</sup>

No conocemos al inventor de este astuto procedimiento, que, por otra parte, no es mencionado por ninguno de los matemáticos que tuvieron que resolver problemas de enumeración. También hay que señalar que esta técnica de la enumeración no

6. Ibn Khaldūn, *Le livre des exemples I : Autobiographie, Muqaddima*, París, Gallimard, 2001, pp. 356-362.

7. *Ibid.*, pp. 989-1020.

8. Al-Būnī, *Shams al-macārif al-kubrā* («El sol de los grandes conocimientos»), Beirut, edición sin fecha.

9. A. Djebbar, *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles*, París, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981, 81-02, pp. 55-75.

10. As-Suyūfī, *al-Muzhir fī 'ulūm al-lughā* («El libro floreciente sobre los conocimientos de la lengua»), El Cairo, edición sin fecha, pp. 71-74.

fue algo exclusivo de los lingüistas y gramáticos. Fue recuperada para utilizarla no como herramienta de cálculo, sino como apoyo visual para acompañar discursos teológicos o místicos. Es precisamente lo que observamos en Ibn Arabi y al-Buni. El primero utiliza, en su *Kitâb inshâ' ad-dawâ'ir* («Libro de producción de círculos»), cinco círculos concéntricos para ilustrar los cinco niveles que unen el conocimiento humano y el divino.<sup>11</sup> El segundo maneja, en su *Shams al-macârif al-kubrâ* («El gran sol de los conocimientos»), series de letras que simbolizan conceptos a veces parecidos a los que utiliza Ramon Llull.<sup>12</sup>

### Las contribuciones combinatorias de los matemáticos de Marrakech

Según los textos que han llegado hasta nosotros, a partir de las preocupaciones lingüísticas expresadas por primera vez en el siglo VIII por al-Khalil Ibn Ahmad (m. 976), el matemático Ibn Munim emprendió sus investigaciones puramente combinatorias. Estas últimas desembocaron en la elaboración, por primera vez en la historia de las matemáticas, de un capítulo autónomo que contenía definiciones, propuestas y procedimientos de demostración con vistas a resolver completamente el problema planteado por los lingüistas de los siglos VIII y IX. Encontramos ese capítulo en su obra titulada *Fiqh al-hisâb* («La ciencia del cálculo»), que, por otra parte, aborda el cálculo y la teoría de los números.<sup>13</sup>

Gracias al biobliógrafo del siglo XIII, Ibn oAbd al-Malik, disponemos de algunas informaciones sobre la vida y obra de este sabio. Era originario de la localidad andalusí de Denia. No se sabe por qué ni en qué época abandonó su ciudad natal para instalarse definitivamente en Marrakech, entonces capital de la dinastía almohade. En ella fue donde adquirió su segundo oficio, el de médico, y donde enseñó paralelamente matemáticas. Su biógrafo lo describe como

uno de los mejores especialistas de su época en geometría y teoría de los números. Además de la obra que hemos mencionado, publicó escritos sobre la geometría euclidiana y los cuadrados mágicos. Pero no ha llegado hasta nosotros ninguno de los libros que trataban de estas dos últimas disciplinas.

El título del capítulo dedicado a la combinatoria es muy significativo, puesto que se trata ni más ni menos que de «la enumeración de palabras de tal naturaleza que el ser humano sólo puede expresarse por una de ellas». El autor afirma querer tratar este problema de una manera general, aunque, para fijar las ideas, se vea obligado a plantearlo en unos términos particulares, sirviéndose del alfabeto árabe. En efecto, las herramientas elaboradas permiten contar las palabras de cualquier lengua, cualquiera que sea la longitud de las mismas.

Ibn Munim empieza estableciendo, a partir de un conjunto de colores de seda, que representa el papel de modelo abstracto, una regla con la que se pueden determinar todas las combinaciones posibles de  $n$  colores,  $p$  a  $p$ . Y así es como llega a construir el famoso triángulo aritmético, más conocido hoy con el nombre de «triángulo de Pascal». Luego establece un conjunto de resultados, importantes por sí mismos, pero que le sirven para encontrar la respuesta a la pregunta inicial.

Esta importante contribución es probablemente la base de una nueva orientación en matemáticas, ya que tuvo repercusiones muy interesantes. Por otra parte, es posible que unos de los alumnos de este matemático, al-Qadi ash-Sharif (m. 1283), fuera el primero en comentar o desarrollar los resultados de su profesor. Pero su obra, que podría informarnos al respecto y que se titula *al-Qânûn fî l-hisâb* («El canon del cálculo»), aún no se ha encontrado. Comoquiera que sea, es a todas luces razonable pensar que este alumno enseñó el contenido del capítulo combinatorio de Ibn Munim. Esta hipótesis se ve confirmada por las contribuciones de un alumno de ash-Sharif, que no es otro que el famoso Ibn al-Banna.

11. Ibn Arabî, *La production des cercles*, edición crítica de P. Fenton y M. Gloton, París, Éditions de l'Éclat, 1996.

12. A. Rashed, *Raison et métaphore selon Raymond Lulle*, tesis doctoral, París, Université Paris III, 1976, pp. 309, 472-486 y 516-520.

13. A. Djebbar, *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Mun'im (XIIe-XIIIe siècles)*, París, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1985, 85-01.

Este último retoma algunas conclusiones de su eminente predecesor, proponiendo nuevas demostraciones y estableciendo vínculos con propuestas muy conocidas de teoría de los números. Esas contribuciones se exponen en dos de sus libros: *Raf' al-hijâb* («El levantamiento del velo») y *Tanbîh al-albâb* («Advertencia a la “gente” inteligente»). En el primero, llega a una conclusión, durante mucho tiempo atribuida a Pascal (m. 1662), que consiste en una fórmula puramente aritmética que permite calcular todas las combinaciones (sin repeticiones) de un número dado de objetos. Este resultado evita el construir el triángulo de Ibn Munim, pero no permite resolver completamente el problema planteado por al-Khalil Ibn Ahmad.<sup>14</sup> En su segunda obra, reúne un cierto número de problemas, inspirados todos ellos por actividades sociales, económicas, culturales o prácticas religiosas. Encontramos, en especial, la enumeración de todas las lecturas posibles de una misma frase, según las reglas de la gramática árabe, el detalle de los diferentes casos de herencia posibles cuando los herederos son  $n$  varones y  $p$  mujeres, etc. También este pequeño libro es donde el autor menciona un problema para el que se requirió la obtención de un resultado combinatorio general. Se trata de la enumeración, según el rito maliquí, de las plegarias que hay que rezar para compensar el olvido de algunas de ellas.<sup>15</sup>

## Las prácticas combinatorias de Ramon Llull

A buen seguro que todos estos temas estaban muy lejos de las preocupaciones de Ramon Llull. Pero creemos que debíamos mencionarlos para dar una idea más concreta del entorno científico, cultural y cultural en el que vivían y trabajaban las diferentes personas que conocieron al pensador mallorquín en

Túnez o Bugía y que debatieron con él. De la misma manera, sería aconsejable estudiar el contenido de los escritos matemáticos de Llull y, mediante estudios comparativos, intentar determinar las eventuales fuentes árabes que habría podido consultar, ya directamente, ya a través de las traducciones latinas y hebreas que estaban disponibles en Barcelona y probablemente también en su isla natal.

En cuanto a los elementos de combinatoria que hemos descubierto en los escritos de Llull que hemos podido consultar, parece que todos ellos proceden de la lectura de obras árabes sobre teología, mística y filosofía y, especialmente, de las que ya hemos mencionado. En su *Ars compendiosa inveniendi veritatem*, Llull utiliza 3 anillos concéntricos que rodean un disco, en el que coloca 5 triángulos reproducidos tres veces, cuyos vértices forman una estrella de 25 puntas. Se trata de su famosa «figura T».<sup>16</sup> En cuanto a la «figura A», que encontramos en su *Ars generalis ultima*, es más escueta pero se basa en el mismo principio.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, es más bien la *Tabla general* la que revela un procedimiento de tipo combinatorio que busca un resultado que se puede calificar de matemático. En efecto, encontramos una verdadera enumeración de las combinaciones de 4 en 4, con repetición y permutación, de un cierto número de letras del alfabeto (que varían entre 9 y 15 si tenemos en cuenta las diferentes figuras utilizadas por Llull en sus obras). Esta enumeración se podría obtener manualmente tras fijar el orden en el que se deben combinar las letras. Pero, dado que Llull conocía el método de los anillos móviles de Ibn Durayd, nos parece más verosímil que obtuviera las columnas de palabras girando el número de anillos necesarios para la operación de contar.<sup>17</sup> Pero es una tarea aburrida y pesada que Llull se habría ahorrado sin dudar si hubiera conocido los resultados obtenidos por Ibn Munim.

14. A. Djebbar, *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIIIe-XIVe siècles*, Paris, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1981, 81-02, pp. 55-75; M. Aballagh, *Raf' al-hijâb d'Ibn al-Bannâ*, tesis doctoral, Paris, Université de Paris I - Panthéon-Sorbonne, 1988, pp. 535-543.

15. A. Djebbar, «Mathématiques et société à travers un écrit maghrébin du XIVe siècle», *Actes du colloque international «De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre»* (Toulouse, 22-24 septembre 2000), Toulouse, Éditions du CIHSO, 2003, pp. 29-54.

16. R. Llull, *Ars compendiosa inveniendi veritatem*, Ms. Biblioteca de Catalunya, Barcelona, n.º 118, f. 6b.

17. R. Llull, *Taula general, Lo pecat d'Adam*, Ms. Biblioteca Pública de Palma, n.º 1.103, ff. 20a-30b.